Lógica – Grado en Ingeniería Informática, Grado en Matemáticas e Informática

21 de diciembre de 2015

Examen de Lógica de Primer Orden

Ejercicio 1. Formalizar en lógica de primer orden, sobre el dominio de las personas, la siguiente argumentación:

> *Algunos políticos son corruptos. Sólo a las personas a las que nunca han votado son honradas. A Manolo le ha votado alguien. Por tanto Manolo es un corrupto.*

Nota: Entiéndase honrado como lo opuesto a corrupto *(3 puntos)*

Solución

$P(x)$: x es un político

$Q(x)$: x es corrupto

$R(x, y)$: x vota a y

a : Manolo

$$\{\, \exists x(P(x) \wedge Q(x)),\ \forall x(\neg Q(x) \rightarrow \neg \exists y R(y, x)),\ \exists x R(x, a) \,\} \vDash Q(a)$$

Ejercicio 2. Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto. Justificar adecuadamente todos los pasos.

$$\{\ \forall x\,(\,P(x) \to Q(a,x)\,)\ ,\ \exists y\, P(y)\ \}\ \vDash\ Q(a,a)$$

Solución

Al haber un símbolo de constante elegimos un dominio con dos elementos {0,1} y añadimos otra constante b. La interpretación I que buscamos será tal que I(a) = 0, I(b) = 1.

Las condiciones sobre las cláusulas son

(1) $I(\forall x(P(x) \to Q(a,x))) = V$ sii

AND (1.1) $I(P(a) \to Q(a,a)) = V$ sii

OR (1.1.1) $I(P(a)) = F$

OR (1.1.2) $I(Q(a,a)) = V$

AND (1.2) $I(P(b) \to Q(a,b)) = V$ sii

OR (1.2.1) $I(P(b)) = F$

OR (1.2.2) $I(Q(a,b)) = V$

(2) $I(\exists z P(z)) = V$ sii

OR (2.1) $I(P(a)) = V$

OR (2.2) $I(P(b)) = V$

(3) $I(Q(a,a)) = F$

La condición (3) es necesaria, y excluye (1.1.2); por lo tanto, la condición (1.1.1) se vuelve necesaria.

La condición (1.1.1) excluye (2.1), haciendo que (2.2) se vuelva necesaria.

La condición (2.2) excluye (1.2.1), haciendo que (1.2.2) se vuelva necesaria.

No hay más contradicciones y pueden verificarse las condiciones (1), (2) y (3).

Hay varios contramodelos, siendo uno de ellos, por ejemplo, el siguiente:

I(a) = 0

I(b) = 1

I(P) = { 1 } (es verdadero si y sólo si su argumento es 1)

I(Q) = { (0,1), (1,0), (1,1) }

Una representación alternativa de las interpretaciones de P y Q sería:

P_D	
0	F
1	V

Q_D	0	1
0	F	V
1	V	V

Ejercicio 3. Demostrar, mediante el método de resolución, que la siguiente estructura deductiva es correcta: $T[C_1, C_2, C_3, C_4] \;\vdash\; \exists x\,(\neg Q(x) \wedge \neg R(x))$

C_1: $R(x) \vee P(x) \vee S(x)$

C_2: $R(x) \vee P(x) \vee \neg Q(f(x))$

C_3: $\neg P(x)$

C_4: $\neg R(x)$

Solución

Se renombran las variables:

C_1: $R(x_1) \vee P(x_1) \vee S(x_1)$
C_2: $R(x_2) \vee P(x_2) \vee \neg Q(f(x_2))$
C_3: $\neg P(x_3)$
C_4: $\neg R(x_4)$

Se define la forma clausular de la negación de la conclusión

C_5: $Q(x_5) \vee R(x_5)$

La cláusula C_1 se puede ignorar al ser $S(x_1)$ un literal puro.

Para que el conjunto sea insatisfacible debe existir una derivación que permita llegar a la cláusula vacía:

C_2: $R(x_2) \vee P(x_2) \vee \neg Q(f(x_2))$ $\qquad$ C_3: $\neg P(x_3)$

$\{x_2/x_3\}$

R_1: $R(x_3) \vee \neg Q(f(x_3))$ $\qquad$ C_4: $\neg R(x_4)$

$\{x_3/x_4\}$

R_2: $\neg Q(f(x_4))$ $\qquad$ C_5: $Q(x_5) \vee R(x_5)$

$\{x_5/f(x_4)\}$

R_3: $R(f(x_4))$ $\qquad$ C'_4: $\neg R(x_6)$

$\{x_6/f(x_4)\}$

R_4: $\square$

Hemos encontrado la cláusula vacía $\square$, luego el conjunto de cláusulas es insatisfacible. La estructura deductiva es correcta.